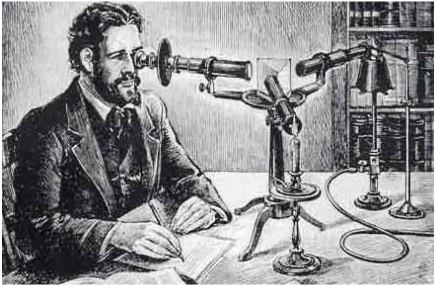
Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Wykład 15

Widmo i promień spektralny



Ustalmy algebrę Banacha A z jedynką 1 nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Def. Widmem (spektrum) elementu $a \in A$ nazywamy zbiór

$$\sigma(a) := \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda 1 \notin \mathrm{Inv}(A)\}.$$

Prz. Widmo elementu algebry funkcji na przestrzeni zwartej M

Jeśli $A = C(M)$, to $\mathrm{Inv}(C(M)) = \{a \in C(M) : \forall_{t \in M}\, a(t) \neq 0\}$ i

$$\begin{aligned}\sigma(a) &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M}\ (a - \lambda 1)(t) = 0)\} \\ &= \{\lambda \in \mathbb{F} : \exists_{t \in M}\ a(t) = \lambda\} \\ &= a(M).\end{aligned}$$

Zatem **widmo funkcji** $a \in C(M)$ **jest obrazem tej funkcji**.

Uw. W powyższym przykładzie jeśli $f : \Omega \to \mathbb{C}$ jest funkcją ciągłą określoną na widmie $\sigma(a) = a(M) \subseteq \Omega$, to $f(a) := f \circ a$ jest elementem algebry $A = C(M)$ - **rachunek funkcyjny** w algebrze A!

Prz. Widmo operatora działającego na przestrzeni Banacha X

Skoro $\mathrm{Inv}(B(X)) = \{T \in B(X) : T : X \to X$ bijekcja$\}$ to **widmo operatora** $T \in B(X)$ wyraża się wzorem

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{F} : T - \lambda 1 : X \to X \text{ odwzorowanie nieodwracalne}\}.$$

Czyli $\lambda \in \sigma(T) \iff$ zachodzi któryś z warunków:

a) $T - \lambda 1$ nie jest surjekcją.
b) $T - \lambda 1$ nie jest injekcją $\iff \ker(T - \lambda 1) \neq \{0\} \iff \exists_{x \in X \setminus \{0\}}\ Tx = \lambda x \iff \lambda$ jest **wartością własną** dla T.

Jeśli $\dim(X) = n < \infty$, to warunki (a) i (b) są równoważne i wtedy

$$\sigma(T) = \text{„zbiór wartości własnych operatora } T\text{''}.$$

Ponadto, mamy wtedy izomorfizm algebr $B(X) \cong M_n(\mathbb{F})$ oraz $\mathrm{Inv}(M_n(\mathbb{F})) = \{T \in M_n(\mathbb{F}) : \det(T) \neq 0\}$. Zatem dla $T \in M_n(\mathbb{F})$

$$\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{F} : \det(T - \lambda 1) = 0\}.$$

Tw. Widmo dowolnego elementu $a \in A$ algebry Banacha A jest **niepustym zbiorem zwartym** oraz $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \le \|a\|\}$.

Dowód: $\mathbb{F} \setminus \sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{F} : a - \lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A)\} = F_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$, gdzie $F_a(\lambda) := a - \lambda 1$, jest funkcją ciągła $F_a : \mathbb{F} \to A$. Skoro zbiór $\mathrm{Inv}(A)$ jest otwarty w A, to $F_a^{-1}(\mathrm{Inv}(A))$ jest zbiorem otwartym, a więc $\sigma(a)$ jest zbiorem domkniętym w $\mathbb{F}$.

Niech $|\lambda| > \|a\| \ge 0$. Wtedy $\|\lambda^{-1} a\| < 1$ i z Lematu Neumanna

$$a - \lambda 1 = \underbrace{-\lambda}_{\neq 0} \underbrace{(1 - \lambda^{-1} a)}_{\in \mathrm{Inv}(A)} \in \mathrm{Inv}(A)$$

Czyli $\lambda \notin \sigma(a)$. To dowodzi inkluzji $\sigma(a) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| \le \|a\|\}$. Zatem, widmo $\sigma(a)$ jest zwarte (domknięte i ograniczone).

Załóżmy nie wprost, że $\sigma(a) = \emptyset$. Wtedy $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ jest funkcją zdefiniowaną na całej płaszczyźnie zespolonej:

$$R_a : \mathbb{C} \to A.$$

Ponadto funkcja $R_a(\lambda) = (a - \lambda 1)^{-1}$ ma następujące własności:

1) R_a jest różniczkowalna, jako złożenie funkcji różniczkowalnych $F_a(\lambda) = a - \lambda 1 \in A$ oraz $\mathrm{Inv}(A) \ni b \mapsto b^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$.
2) R_a zbiega do zera w nieskończoności, bo dla $|\lambda| > \|a\|$ mamy

$$\|R_a(\lambda)\| = \|(a - \lambda 1)^{-1}\| = \tfrac{1}{|\lambda|}\|(1 - \lambda^{-1}a)^{-1}\| = \tfrac{1}{|\lambda|}\|\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^{-1}a)^n\|$$

$$\leq \tfrac{1}{|\lambda|}\sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda^{-1}a\|^n = \tfrac{1}{|\lambda|}\cdot\tfrac{1}{1-|\lambda|^{-1}\|a\|} = \tfrac{1}{|\lambda|-\|a\|} \xrightarrow{|\lambda|\to\infty} 0.$$

Dla dowolnego funkcjonału $f \in A^*$, na mocy 1), 2) funkcja

$$\mathbb{C} \ni \lambda \longmapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

jest różniczkowalna w sensie zespolonym (a więc analityczna) i znika w nieskończoności. Zatem na mocy **Twierdzenia Liouville'a** funkcja ta jest stała i równa zero. Jako że funkcjonały z A^* rozdzielają elementy A, otrzymujemy, że $R_a(\lambda) = 0$ dla $\lambda \in \mathbb{C}$:

$$R_a \equiv 0.$$

Ale zero nie jest elementem odwracalnym. ↯ ■

Def. Dla dowolnego $a \in A$ oraz $p(z) = \alpha_n z^n + ... + \alpha_1 z + \alpha_0$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, ..., n$, kładziemy

$$p(a) := \alpha_n a^n + ... + \alpha_1 a + \alpha_0 1 \in A.$$

Stw. (o obrazie spektralnym) Dla dowolnego wielomianu p i elementu $a \in A$ mamy $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a)) := \{p(\lambda) : \lambda \in \sigma(a)\}$.

Dowód: Niech $\lambda \in \mathbb{C}$. Zapiszmy wielomian $p(z) - \lambda$ w postaci iloczynowej, tzn. tzn. niech $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 0$, takie, że

$$p(z) - \lambda = \lambda_0 (z - \lambda_1) \cdot ... \cdot (z - \lambda_n).$$

Liczby $\lambda_1, ..., \lambda_n$ są rozwiązaniami równania $p(z) = \lambda$. Powyższe równanie ma swój analogon operatorowy

$$p(a) - \lambda 1 = \lambda_0 (a - \lambda_1 1) \cdot ... \cdot (a - \lambda_n 1).$$

Jeśli $\lambda_0 = 0$, to $p \equiv \lambda$ i stąd $\sigma(p(a)) = \sigma(\lambda 1) = \{\lambda\} = p(\sigma(a))$.

Załóżmy, zatem że $\lambda_0 \neq 0$. Wtedy odwracalność $p(a) - \lambda 1$ jest równoważna odwracalności iloczynu $(a - \lambda_1 1) \cdot ... \cdot (a - \lambda_n 1)$, która jest z kolei równoważna odwracalności każdego ze składników.

Czyli jeśli $p(z) - \lambda = \lambda_0(z - \lambda_1) \cdot ... \cdot (z - \lambda_n)$, to

$$p(a) - \lambda 1 \in \mathrm{Inv}(A) \iff \forall_{i=1,...,n}\ (a - \lambda_i 1) \in \mathrm{Inv}(A).$$

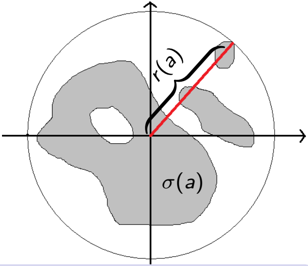
Stąd

$$\begin{aligned} \lambda \in \sigma(p(a)) &\iff \exists_{i=1,...,n}\ \lambda_i \in \sigma(a) \\ &\iff \sigma(a) \cap \{\lambda_1, ..., \lambda_n\} \neq \emptyset \\ &\iff \sigma(a) \cap \{z \in \mathbb{C} : p(z) = \lambda\} \neq \emptyset \\ &\iff \exists_{z \in \sigma(a)}\ p(z) = \lambda \\ &\iff \lambda \in p(\sigma(a)). \end{aligned}$$

Zatem $\sigma(p(a)) = p(\sigma(a))$. ■

Def. Promieniem spektralnym elementu $a \in A$ nazywamy liczbę

$$r(a) = \max_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|.$$



$r(a)$ to najmniejszy promień koła o środku w zerze, w którym zawarte jest całe widmo $\sigma(a)$.

Tw. (Wzór Beurlinga-Gelfanda-Naimarka)

Promień spektralny elementu $a \in A$ wyraża się wzorem

$$r(a) = \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Dowód: Niech $\lambda \in \sigma(a)$. Wtedy $\lambda^n \in \sigma(a^n)$ na mocy **Stw.** i stąd $|\lambda|^n \leq \|a^n\|$ na mocy **Tw.** Czyli $|\lambda| \leq \|a^n\|^{\frac{1}{n}}$ i stąd

$$r(a) \leq \inf_{n \in \mathbb{N}} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \to \infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

Zatem wystarczy pokazać, że

$$\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a).$$

Przypomnijmy, że $\mathbb{C}\setminus\sigma(a) \ni \lambda \longmapsto R_a(\lambda) = (a-\lambda 1)^{-1} \in \mathrm{Inv}(A)$ jest różniczkowalna. Zatem kładąc $\Delta := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| > r(a)\}$ dla dowolnego $f \in A^*$ funkcja

$$\mathbb{C}\setminus\Delta \ni \lambda \longmapsto f(R_a(\lambda)) \in \mathbb{C}$$

jest holomorficzna, czyli posiada rozwinięcie postaci

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}\setminus\Delta,$$

gdzie $\lambda_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, są pewnymi ustalonymi współczynnikami. Przypomnijmy, że $|\lambda| > \|a\|$ mamy

$$R_a(\lambda) = \ -\lambda^{-1}\left(1-\lambda^{-1}a\right)^{-1} \ = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} -a^{n-1}\lambda^{-n}$$

Stąd $f(R_a(\lambda)) = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1})\lambda^n$, czyli

$$\lambda_n = f(-a^{n-1}), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zatem dla każdego $|\lambda| > r(a)$ szereg

$$f(R_a(\lambda)) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1})\lambda^{-n} = \sum_{n=1}^{\infty} f(-a^{n-1}\lambda^{-n})$$

jest zbieżny. W szczególności ciąg $\{f(a^{n-1}\lambda^{-n})\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny do zera. Skoro zachodzi to dla dowolnego funkcjonału $f \in A^*$, to ciąg $\{a^{n-1}\lambda^{-n}\}_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do zera, a więc ograniczony na mocy Twierdzenia Banacha-Steinhausa. Zatem

$$\begin{aligned} r(a) < |\lambda| &\Longrightarrow \exists_{M>0}\ \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|a^n\lambda^{-n}\| \leq M \\ &\Longrightarrow \forall_{n\in\mathbb{N}}\ \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq M^{\frac{1}{n}}|\lambda| \Longrightarrow \limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|. \end{aligned}$$

Stąd $\limsup_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r(a)$. ■

Uw. Szereg potęgowy $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n z^n$ jest bezwględnie zbieżny wewnątrze koła o promieniu $r := 1/\limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}}$. Jeśli $r(a) < r$, to

$$f(a) := \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a^n$$

szereg jest (bezwględnie) zbieżny w A, bo

$$\limsup_{n\to\infty} \|\lambda_n a^n\|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |\lambda_n|^{\frac{1}{n}} \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}} = r(a)/r < 1.$$

Tw. (rachunek funkcyjny w algebrach Banacha)

Dla dowolnego $a \in A$ oraz funkcji holomorficznej $f : \Omega \to \mathbb{C}$, gdzie $\sigma(a) \subseteq \Omega$ - zbiór otwarty, mamy poprawnie zdefiniowany operator

$$f(a) := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(a)(\lambda 1 - a)^{-1}\, d\lambda \in A,$$

gdzie $\gamma_k \subseteq \Omega$ to drogi Jordana ograniczające zbiór otwarty zawierający $\sigma(a)$ (wtedy $f(z) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} f(z)(\lambda - z)^{-1}$, $z \in \sigma(a)$).